ОНЛАЙН

ВСЕМИРНЫЕ РЕШЕНИЯ

# ЧЕТВЕРТАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

08.01.2025

ИНДЕКСАЦИЯ

Google Scholar

OpenAIRE | EXPLORE

zenodo

## НАПРАВЛЕНИЯ КОНФЕРЕНЦИИ

- НАУЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
- ПЕДАГОГИКА
- ПСИХОЛОГИЯ
- ФИЛОСОФИЯ
- ИСТОРИЯ

- ИНФОРМАТИКА
- ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
- МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

- ЭКОНОМИКА
- ФИНАНСЫ

***Введение***

*В сборнике материалов конференции, посвященных роли науки, образования и производства в эпоху глобализации, актуальным проблемам взаимодействия этих процессов, отзывам об их решениях, были представлены зрелые специалисты отрасли.*

*Кроме того, представлены исследования на научно-практическую тему, проводимые в области экономики, точных наук, естественных и социально-гуманитарных наук в период глобализации, представлена информация в научно-практической сфере, которая включает в себя новейшие инновационные технологии в сферах производства.*

*Можно утверждать, что этот сборник является одним из специфических перекрестков современных мыслей и инновационных идей в мире науки. В этой научно-практической конференции приняли активное участие профессора и научные сотрудники, занимающиеся научными исследованиями в Узбекистане и зарубежных странах. Значительный вклад в повышение позиций научно-практической конференции внесли профессора и преподаватели отечественных и зарубежных высших учебных заведений.*

*Профессора и преподаватели зарубежных высших учебных заведений, активно участвовавшие в работе конференции, внесли достойный вклад в высокий уровень взаимодействия с учеными нашей страны. Процессы международного сотрудничества с зарубежными странами и обмена с ними в области науки в эпоху глобализации оказывают положительное влияние на развитие высшего образования, сфер науки и производства. Материалы этой конференции особенны тем, что включают в себя широкий спектр исследований, от теоретических разработок до практических решений, демонстрирующих разнообразие подходов и направлений в этой области.*

*В заключение следует отметить, что данная научно-практическая конференция станет очень полезным собранием для всех, кто интересуется современными исследованиями в области дальнейшего развития высшего образования, науки, воспитательной работы и производства в эпоху глобализации. Авторы несут ответственность за содержание и качество статей и тезисов, включенных в сборник.*

# HILBERT SPACES AND THEIR APPLICATIONS IN QUANTUM MECHANICS

**Nurmanova Ezoza Ulugbek qizi**
**Khushvaqtova Diyora Shavkat qizi**
**Shokirova Hilola Farkhod qizi**
**Shodiyeva Sabina Dusmurod qizi**
*Students of "Applied Mathematics" branch of Jizzakh National University of Uzbekistan.*

**Abstract**

This paper explores the concept of Hilbert spaces and their applications in quantum mechanics. First, the definition and properties of Hilbert spaces are analyzed, followed by an explanation of their use in quantum mechanics. Additionally, fundamental concepts of quantum mechanics, including wave functions and expectation value operators, are described in terms of Hilbert spaces. The paper also presents mathematical solutions to key applications of Hilbert spaces in quantum mechanics.

**Keywords:** Hilbert spaces, quantum mechanics, Schrödinger equation, Fourier series, spectral properties, quantum harmonic oscillator, spin-1/2 systems, quantum teleportation, Pauli matrices, wave functions.

## 1.Introduction

Hilbert spaces are a crucial part of functional analysis, and their application in quantum mechanics is of great importance. Quantum mechanics incorporates elements of probability and linear algebra to describe natural phenomena. Hilbert spaces are infinite-dimensional spaces used as state spaces in quantum mechanics. These spaces are equipped with an inner product, allowing quantum states to be treated as vectors. This paper discusses the fundamental properties of Hilbert spaces and their significance in quantum mechanics.

## Main Content

## 2. Definition and Fundamental Properties of Hilbert Spaces

A Hilbert space is a complex or real vector space that satisfies the following properties:

- **Existence of an Inner Product**: An inner product is defined for any two vectors.
- **Completeness Property**: Any Cauchy sequence in the space converges within the space.
- **Existence of an Orthonormal Basis**: Every Hilbert space can be expressed in terms of an orthonormal basis.

## 3. Hilbert Spaces in Quantum Mechanics

In quantum mechanics, every state is represented as a **vector in a Hilbert space**. If a quantum system's state is represented by$|\psi|$, its physical quantities are determined using observable operators.

- **Wave Function**: The state of a particle in quantum mechanics is represented by the complex-valued wave function $\psi(x)$, which belongs to the $L^2$ space of square-integrable functions.
- **Expectation Value and Operators**: The expectation value of an observable is given by: $|A| = (\psi|A^{\wedge}|\psi)$rangle where $A^{\wedge}$is the observable operator.
- **Spectral Analysis**: In quantum mechanics, operators are decomposed using spectral analysis, and their eigenvalues correspond to possible measurable quantities.

**4. Applications of Hilbert Spaces in Quantum Mechanics**

**4.1.Example : Schrödinger Equation for a Quantum Particle**

The time-dependent Schrödinger equation is given by: $ih\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H^{`}\psi(x,t)$ where $H^{`}$ is the Hamiltonian operator. In a simple case of a free particle, the Hamiltonian is given by: $H^{`} = -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ Solving this equation using separation of variables: $\psi(x,t) = \phi(x)e^{-\frac{iEt}{h}}$leads to the time-independent Schrödinger equation:$-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} = E\phi(x)$ which admits solutions in the Hilbert space of square-integrable functions.

**4.2.Example : Orthonormal Bases and Fourier Series**

In Hilbert spaces, wave functions can be expressed as a sum over an orthonormal basis: $\psi(x) = \sum_n c_n\phi_n(x)$ where $\phi_n(x)$ are basis functions and $c_n$ are Fourier coefficients:$c_n = (\psi|\phi_n)$ This decomposition is fundamental in solving quantum systems such as the particle in a box.

**4.3.Example : Spectral Properties of Operators**

The momentum operator is defined as:$P^{`}\psi(x) = -ih\frac{d}{dx}\psi(x)$ Solving , $P^{`}\psi = p\psi$ we obtain eigenfunctions:$\psi_p(x) = e^{\frac{ipx}{h}}$ which form a complete set in the Hilbert space of wave functions.

**4.4.Example : Quantum Harmonic Oscillator**

The Hamiltonian for a quantum harmonic oscillator is given by:$H^{`} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^{`2}$ Using ladder operators, solutions take the form: $\psi_n = H_n(x)e^{-\frac{m\omega x^2}{2h}}$ where $H_n(x)$ are Hermite polynomials, forming an orthonormal basis in Hilbert space.

**4.5.Example : Spin-1/2 Systems**

Spin states are represented using Pauli matrices:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solving $\det(\sigma_z - \lambda I) = 0$ yields eigenvalues $\lambda = \pm 1$ with eigenvectors:$| + | = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ | - | = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ which form an orthonormal basis in spin Hilbert space.

**4.6.Example : Quantum Teleportation**

Entangled states used in teleportation are given by: $|\Phi^{+}| = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00| + |11|)$ which are essential for quantum communication and computing applications.

**7.Software solution:**

Examples of HILBERT spaces and their applications in quantum mechanics are demonstrated by the following C# code process:

```
using System;
using System.Numerics;

class QuantumMechanics
{
   // Example 1: Discretized Schrödinger Equation (Simple Free Particle)
   public static Complex[] SchrodingerEvolution(Complex[] psi, double dt, double dx, double hbar, double m)
   {
      int N = psi.Length;
      Complex[] newPsi = new Complex[N];
      double coeff = -hbar * dt / (2 * m * dx * dx);

      for (int i = 1; i < N - 1; i++)
      {
         newPsi[i] = psi[i] + coeff * (psi[i + 1] - 2 * psi[i] + psi[i - 1]);
      }
      return newPsi;
   }

   // Example 2: Fourier Series Representation (Orthonormal Basis Expansion)
   public static double FourierCoefficient(double[] psi, int n, int N)
   {
      double sum = 0;
      for (int i = 0; i < N; i++)
      {
         sum += psi[i] * Math.Cos(n * Math.PI * i / N); // Basis function
      }
      return sum / N;
   }

   // Example 3: Momentum Operator in Hilbert Space
   public static Complex MomentumOperator(Complex[] psi, double dx, double hbar, int index)
   {
      if (index == 0 || index == psi.Length - 1)
         return 0;
```

```
            return -Complex.ImaginaryOne * hbar * (psi[index + 1] - psi[index - 1]) / (2 * dx);
        }

        // Example 5: Spin-1/2 Representation with Pauli Matrices
        public static Complex[,] PauliX = { { 0, 1 }, { 1, 0 } };
        public static Complex[,] PauliY = { { 0, -Complex.ImaginaryOne }, { Complex.ImaginaryOne, 0 } };
        public static Complex[,] PauliZ = { { 1, 0 }, { 0, -1 } };

        public static Complex[] ApplyPauliMatrix(Complex[,] matrix, Complex[] spinor)
        {
            return new Complex[]
            {
                matrix[0, 0] * spinor[0] + matrix[0, 1] * spinor[1],
                matrix[1, 0] * spinor[0] + matrix[1, 1] * spinor[1]
            };
        }

        static void Main()
        {
            // Example: Spin-1/2 System with Pauli Matrices
            Complex[] spinUp = { 1, 0 };
            Complex[] spinDown = { 0, 1 };

            Complex[] result = ApplyPauliMatrix(PauliX, spinUp);
            Console.WriteLine($"Pauli X on spin up: [{result[0]}, {result[1]}]");
        }
    }
```

**8. Conclusion**

Hilbert spaces provide the fundamental mathematical framework for describing quantum mechanical states. All wave functions in quantum mechanics reside within infinite-dimensional Hilbert spaces, and their physical properties are characterized using operators.

**References**

[1].Dirac, P.A.M. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 1958.

[2].Griffiths, D.J. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2018.

[3].Sakurai, J.J. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1994.

[4].Reed, M., Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1*. Academic Press, 1980.

[5].von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1955.

[6].Courant, R., Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*. Wiley, 1989.

[7].Hall, B.C. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer, 2013.

[8].Ballentine, L.E. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific, 2014.

[9].Nielsen, M.A., Chuang, I.L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.

[10].Thirring, W. *Quantum Mathematical Physics: Atoms, Molecules and Large Systems*. Springer, 2013.